

Variables aléatoires – Activités – Correction

Activité 1 : (Machine à sous)

Une machine à sous fonctionne de la manière suivante : On insère une pièce de 1€ dans la machine, le rouleau de la machine tourne et on obtient une combinaison de 3 images de fruits.

Il y a 10 images de fruits différentes (banane, raisin, pomme, poire, cerise, fraise, framboise, ananas, orange, kiwi). On gagne 20€ lorsque l'on obtient 3 fruits identiques, 2€ lorsque l'on obtient 2 fruits identiques et sinon on perd notre mise.

On note X le gain du joueur sur une partie.



- 1) a. X est une variable aléatoire sa valeur dépend du hasard.
 b. Les valeurs possibles pour X sont 19€, 1€ ou $-1€$: Le gain du joueur correspond en effet à ce que la machine à sous donne moins la mise de départ de 1€.
- 2) a. Il y a 3 images sur le rouleau et 10 images de fruits différentes donc :
 $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ combinaisons possibles.
 b. Il y a 10 combinaisons avec 3 fruits identiques : La probabilité est donc de $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100} = 0.01 = 1\%$.
 c. Commençons par compter le nombre de combinaisons avec par exemple deux bananes :
 Les deux bananes (B) peuvent être associés aux 9 autres fruits (X) et il y a à chaque fois 3 combinaisons possibles : BBX ; BXB et XBB . On a donc $3 \times 9 = 27$ combinaisons avec 2 bananes.
 Comme il y a 10 fruits différents, on obtient $27 \times 10 = 270$ combinaisons avec 2 fruits identiques.
 La probabilité est donc de $\frac{270}{1000} = \frac{27}{100} = 0.27 = 27\%$
 d. La probabilité de ne pas avoir de fruits identiques est de $1 - 0.27 - 0.01 = 0.72 = 72\%$
- 3) a. Compléter le tableau suivant :

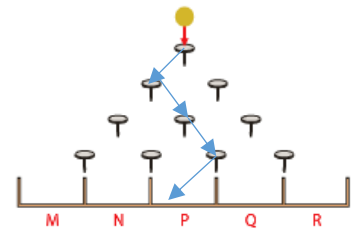
Gains	19	1	-1
Probabilités	0.01	0.27	0.72

- b. $P(X \geq 0) = P(X = 19) + P(X = 1) = 0.01 + 0.27 = 0.28$.
 Le joueur a 28% de chance de gagner de l'argent
- c. On trouve $1 = 100\% : 0.01 + 0.27 + 0.72 = 1$
- 4) Les fréquences observées sont très proches des probabilités calculées à la question précédente.
 - a. Le gain moyen du joueur est donnée par la moyenne de ses gains sur les 10 000 parties.
 On trouve environ $E(X) = -0.2708€$ (Varie légèrement entre deux simulations)
 - b. On calcule $E(X) = 19 \times 0.01 + 1 \times 0.27 - 1 \times 0.72 = -0.26€$. Cela signifie qu'en moyenne le joueur perdra 0.26€ par partie.



Activité 2 (Planche de Galton) :

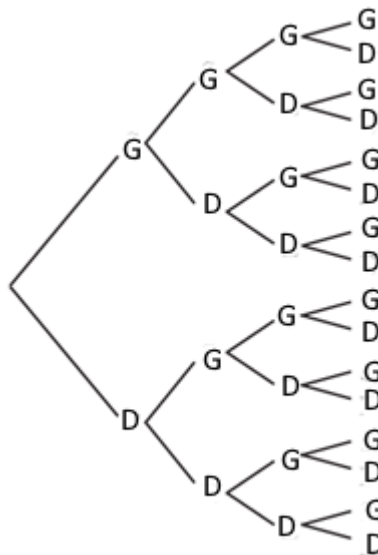
Lorsque la bille tombe sur un clou elle a autant de chance d'aller à gauche qu'à droite. On lâche la bille jaune sur le premier clou et on s'intéresse au chemin qu'elle effectue jusqu'au casiers M, N, P, Q, et R.



- 1) Dans le casier P .
- 2) Quels sont les chemins qui mènent à chaque casier ?

Casier M	Casier N	Casier P	Casier Q	Casier R
$GGGG$	$GGGD ; GGDG$ $GDGG ; DGGG$	$GGDD ; DDGG$ $GDGD ; DGDG$ $GDDG ; DGDD$	$DDDG ; DDGD$ $DGDD ; GDDD$	$DDDD$

- 3) Chaque branche a pour probabilité $\frac{1}{2} = 0.5$.



- 4) On note $\binom{4}{k}$ le nombre de chemin(s) où la boule est allée exactement k fois à gauche.

Compléter : $\binom{4}{0} = 1$ $\binom{4}{1} = 4$ $\binom{4}{2} = 6$ $\binom{4}{3} = 4$ $\binom{4}{4} = 1$

- 5) Casier M : $p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625 = 6.25\%$

Casier N : $p = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

Casier P : $p = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$

Casier M : $p = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

Casier M : $p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625 = 6.25\%$



Activité 3 (Triangle de Pascal) :

On considère le tableau ci-dessous. Les « 1 » qui sont placés dans ce tableau délimitent un « triangle » que nous allons compléter avec des nombres de la façon suivante : Chaque nombre du triangle s'obtient en additionnant deux nombres de la ligne précédente : Celui du dessus avec celui de la colonne précédente.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
10					210					

1) Voir ci-dessus.

2) On retrouve : $\binom{4}{0} = 1$ $\binom{4}{1} = 4$ $\binom{4}{2} = 6$ $\binom{4}{3} = 4$ $\binom{4}{4} = 1$

3) $\binom{3}{2} = 3$; $\binom{5}{3} = 10$; $\binom{9}{5} = 126$; $\binom{10}{4} = 210$ ($84 + 126$).

4) Avec 8 étages de clous, pour arriver dans le casier du milieu, la bille doit aller 4-fois à gauche et 4-fois à droite. Il y a $\binom{8}{4} = 56$ chemins possibles. Chaque chemin a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$

Donc la probabilité que la bille aille au milieu est de $\frac{56}{256} = \frac{7}{32} = 0.21875 = 21.875\%$

